Limites de fonctions. Asymptotes.

I) Limite d'une fonction en plus l'infini

Etudier la limite d'une fonction f en $+\infty$ c'est étudier le comportement des nombres $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

1) Exemples

Exemple 1:

x	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
f(x)	100	400	900	1600	2500	3600	4900	6400	8100	10000	12100	14400

On observe que plus le nombre x est grand plus la valeur $f(x)$ est grande.

La limite de cette fonction en $+\infty$ est $+\infty$.

Exemple 2:

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
f(x)	2	-88	-378	-868	-1558	-2448	-3538	-4828	-6318	-8008	-9898	-11988

On observe que plus le nombre x est grand plus la valeur $f(x)$ est petite ($f(x)$ est négative et sa valeur absolue est grande).

La limite de cette fonction en $+\infty$ est $-\infty$.

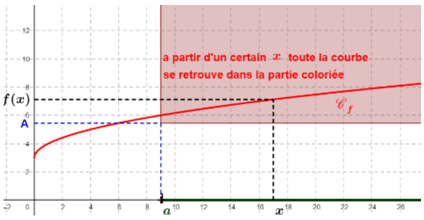
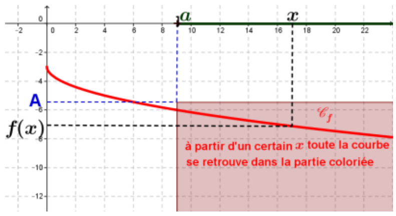
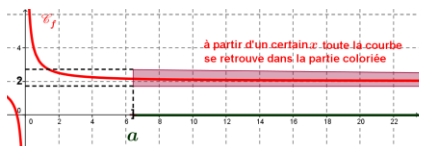
Exemple 3:

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
f(x)	1	1,9524	1,9756	1,9836	1,9877	1,9901	1,9917	1,9929	1,9938	1,9945	1,995	1,9955

On observe que plus le nombre x est grand plus $f(x)$ est proche d'un nombre fini, dans notre exemple : 2.

La limite de cette fonction en $+\infty$ est 2.

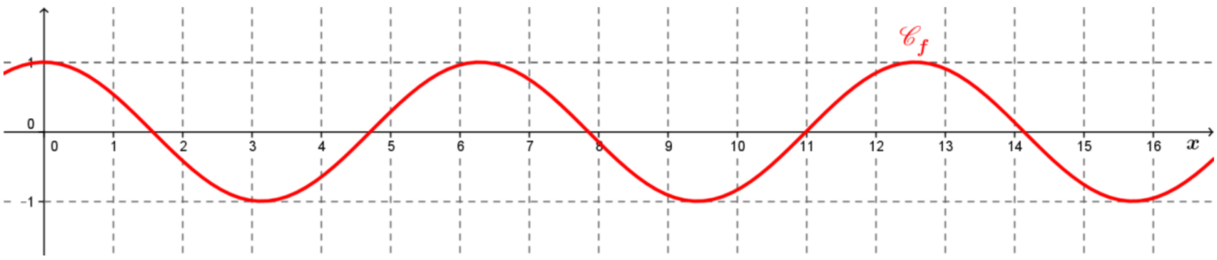
2) Définition :

f est une fonction définie sur un intervalle de la forme: [b ; +∞[		
• La fonction f admet +∞ comme limite lorsque x tend vers +∞, si tout intervalle ouvert du type]A ; +∞[contient $f(x)$ pour tous les nombres x suffisamment grands. **On écrira que:** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	**• La fonction f admet -∞ comme limite lorsque x tend vers +∞, si tout intervalle ouvert du type] -∞ ; A[, contient $f(x)$ pour tous les nombres x suffisamment grands.** **On écrira que:** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	**• Soit ℓ un nombre réel. La fonction f admet ℓ comme limite lorsque x tend vers +∞, si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tous les nombres suffisamment grands.** **On écrira que:** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$
		
Exemple: $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} + 3 = +\infty$	**Exemple**: $\lim\limits_{x \to +\infty} -\sqrt{x} - 3 = -\infty$	**Exemple**: $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{x} + 2) = 2$

Remarques :

• Comme pour les suites, une limite de fonction lorsqu'elle existe est unique.

• Une fonction peut ne pas avoir de limite : Prenons comme exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \cos x$. Cette fonction n'a pas de limite en $+\infty$. Elle oscille comme le montre sa représentation graphique ci-dessous :



II) Limite d'une fonction en moins l'infini

Etudier la limite d'une fonction f en -∞ c'est étudier le comportement des nombres $f(x)$ lorsque x tend vers -∞.

1) Exemples

Exemple 1:

x	0	-10	-20	-30	-40	-50	-60	-70	-80	-90	-100	-110
f(x)	-2	98	398	898	1598	2498	3598	4898	6398	8098	9998	12098

On observe que plus le nombre x est petit (x est négatif et grand en valeur absolue) plus la valeur $f(x)$ est grande.

La limite de cette fonction en -∞ est +∞.

Exemple 2:

x	0	-10	-20	-30	-40	-50	-60	-70	-80	-90	-100	-110
f(x)	0	-990	-7980	-26970	-63960	-124950	-215940	-342930	-511920	-728910	-999900	-1E+06

On observe que plus le nombre x est petit (x est négatif et grand en valeur absolue) plus la valeur $f(x)$ est petite ($f(x)$ est négative et sa valeur absolue est grande).

La limite de cette fonction en -∞ est -∞.

Exemple 3:

x	0	-10	-20	-30	-40	-50	-60	-70	-80	-90	-100	-110
f(x)	-2	2,8387	2,918	2,9451	2,9587	2,9669	2,9724	2,9763	2,9793	2,9815	2,9834	2,9849

On observe que plus le nombre x est petit (x est négatif et grand en valeur absolue), plus $f(x)$ est proche d'un nombre fini, dans notre exemple 3.

La limite de cette fonction en -∞ est 3.

2) Définition :

<table>
<tr><td colspan="3">f est une fonction définie sur un intervalle de la forme:]-∞ ; b]</td></tr>
<tr>
<td>• La fonction f admet +∞ comme limite lorsque x tend vers -∞, si tout intervalle ouvert du type]A ; +∞[contient $f(x)$ pour tous les nombres x négatifs dont la valeur absolue est grande.

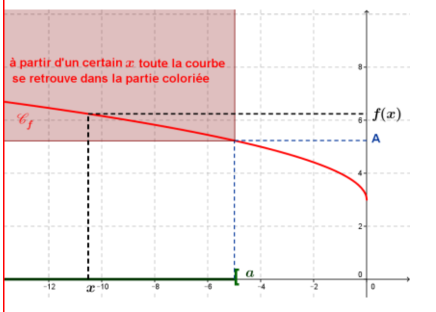
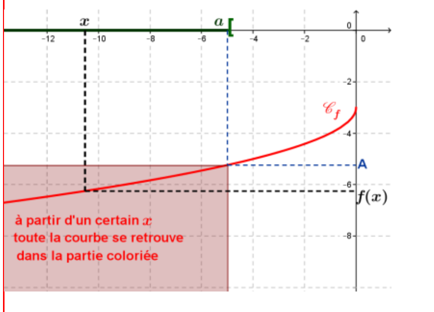
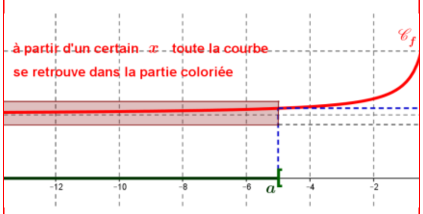
On écrira que:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$</td>
<td>• La fonction f admet -∞ comme limite lorsque x tend vers -∞, si tout intervalle ouvert du type] -∞ ; A[, contient $f(x)$ pour tous les nombres x négatifs dont la valeur absolue est grande.

On écrira que:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$</td>
<td>• Soit ℓ un nombre réel. La fonction f admet ℓ comme limite lorsque x tend vers -∞, si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tous les nombres x négatifs dont la valeur absolue est grande.

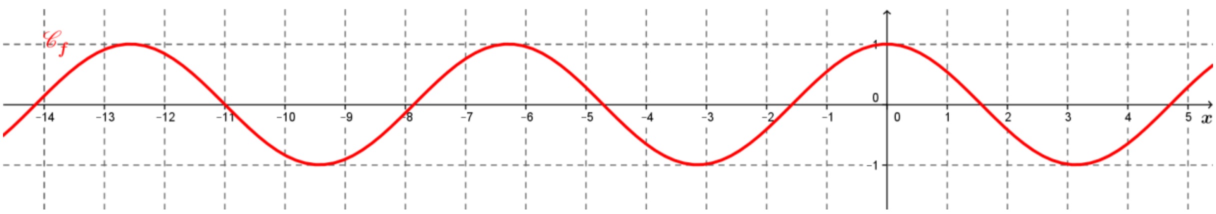
On écrira que:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Exemple: $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{-x} + 3 = +\infty$</td>
<td>Exemple: $\lim\limits_{x \to -\infty} -\sqrt{-x} - 3 = -\infty$</td>
<td>Exemple: $\lim\limits_{x \to -\infty} (-\frac{1}{x} + 2) = 2$</td>
</tr>
</table>

Remarques :

• Comme pour les suites, une limite de fonction lorsqu'elle existe est unique.

• Une fonction peut ne pas avoir de limite : Prenons comme exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \cos x$. Cette fonction n'a pas de limite en $-\infty$. Elle oscille comme le montre sa représentation graphique ci-dessous :



III) Limite d'une fonction en un réel a.

1) Exemples

Exemple 1:

x	2,9	2,99	2,9999	2,99999
f(x)	100	10000	100000000	10000000000

3,00001	3,0001	3,001	3,01
10000000000	100000000	1000000	10000

On observe que plus le nombre x est proche de 3 plus la valeur $f(x)$ est grande.

La limite de cette fonction en 3 est +∞.

Exemple 2:

x	1,9	1,99	1,9999	1,99999
f(x)	-190	-19900	-199990000	-19999900000

2,00001	2,0001	2,001	2,01
-20000100000	-200010000	-2001000	-20100

On observe que plus le nombre x est proche de 2 plus la valeur $f(x)$ est petite ($f(x)$ est négative et sa valeur absolue est grande).

La limite de cette fonction en 2 est -∞.

Exemple 3:

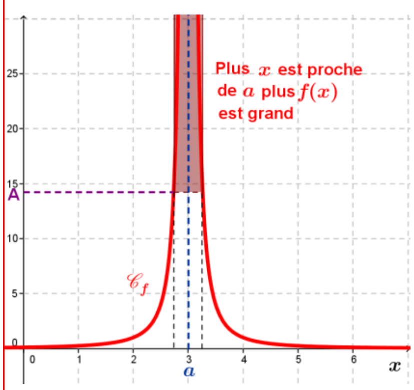
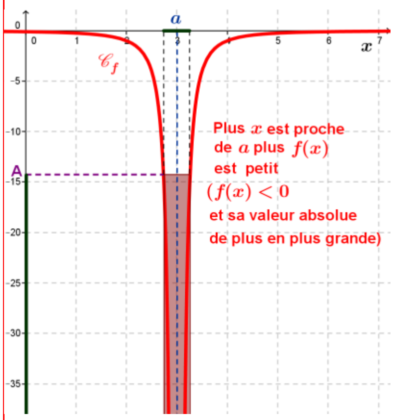
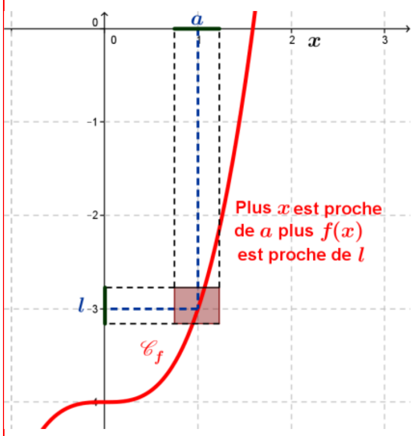
x	4,99	4,999	4,9999	4,999999	4,9999999
f(x)	21,95	21,995	22	21,999995	21,9999995

5,0000001	5,00001	5,0001	5,001	5,01
22,0000005	22,00005	22,0005	22,005	22,05

On observe que plus le nombre x est proche de 5, plus $f(x)$ est proche du nombre 22.

La limite de cette fonction en 5 est 22.

2) Définition

f est une fonction définie sur un ensemble D ; a est un réel tel que a appartient à D ou est une borne de D		
• La fonction f admet $+\infty$ comme limite lorsque x tend vers a, si tout intervalle ouvert du type]A ; $+\infty$[contient $f(x)$ pour tous les nombres x suffisamment proche de a. **On écrira que:** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$	**• La fonction f admet $-\infty$ comme limite lorsque x tend vers a, si tout intervalle ouvert du type] $-\infty$; A[, contient $f(x)$ pour tous les nombres x suffisamment proche de a. On écrira que:** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$	**• Soit ℓ un nombre réel. La fonction f admet ℓ comme limite lorsque x tend vers a, si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tous les nombres x suffisamment proche de a.** **On écrira que:** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$
		
Exemple: $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$	**Exemple**: $\lim\limits_{x \to 3} \frac{-1}{(x-3)^2} = -\infty$	**Exemple**: $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 - 4) = -3$

Remarques :

• Une limite de fonction lorsqu'elle existe est unique.

• Une fonction peut ne pas avoir de limite en un nombre fini a. (Voir le paragraphe suivant : limite à gauche, limite à droite)

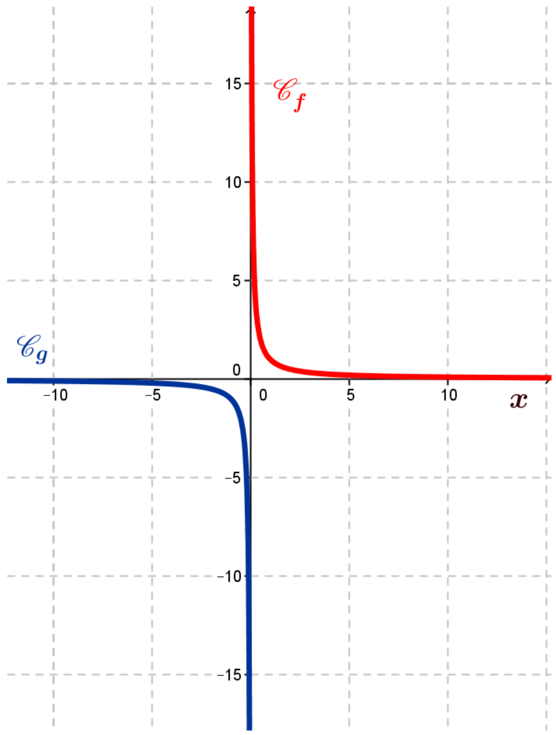
• Si f est une fonction définie en a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Exemple : $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$

2) Limite à droite, limite à gauche

a) Exemple:

Voici le graphique de la fonction $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Etudions de plus près le comportement de cette fonction pour x proche de 0.



Considérons la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et la fonction g définie sur $]-\infty\ ;\ 0[$ par $g(x) = \frac{1}{x}$

Graphiquement, on observe que:
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$

Donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ ne semble pas avoir de limite en 0.

Mais **si $x > 0$** alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$, et

si $x < 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = -\infty$

On parle alors de **limite à droite de 0 et de limite à gauche de 0 et on écrit :**
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ **et** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$

b) définition:

- **f admet une limite à droite de a lorsque f admet une limite lorsque x tend vers a avec $x > a$ que l'on note** $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$
- **f admet une limite à gauche de a lorsque f admet une limite lorsque x tend vers a avec $x < a$ que l'on note** $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$

Remarques:

- On ne distingue les limites à gauche de a et à droite de a uniquement lorsque celles-ci sont différentes.

- Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ alors la fonction f n'a pas de limite en $\boldsymbol{a}$. Dans le cas contraire si

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ La fonction f a dans ce cas une limite en $\boldsymbol{a}$.

Autres exemples :

• Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-4\}$ par $f(x) = \frac{1}{x+4}$

Cette fonction n'a pas de limite en -4 mais à une limite à gauche et à droite de 4

$\lim\limits_{\substack{x \to -4 \\ x > -4}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -4 \\ x < -4}} f(x) = -\infty$

• Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $g(x) = \frac{1}{x^2}$

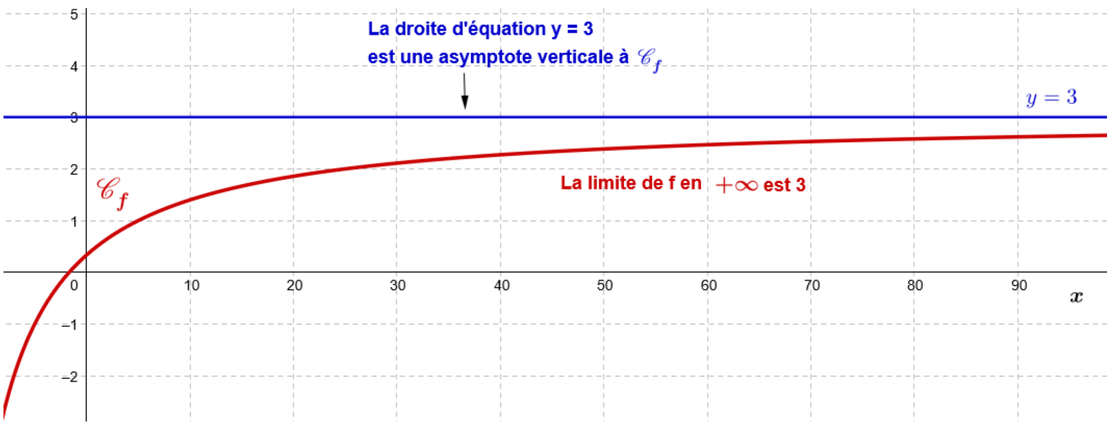
Cette fonction a une limite en 0 qui est : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$

III) Asymptotes parallèles aux axes

a) Asymptote horizontale

Lorsque la limite en +∞ (respectivement en -∞) d'une fonction f est égale à un nombre réel ℓ, la droite d'équation $y = \ell$ est appelée asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$ en +∞ (respectivement en -∞)

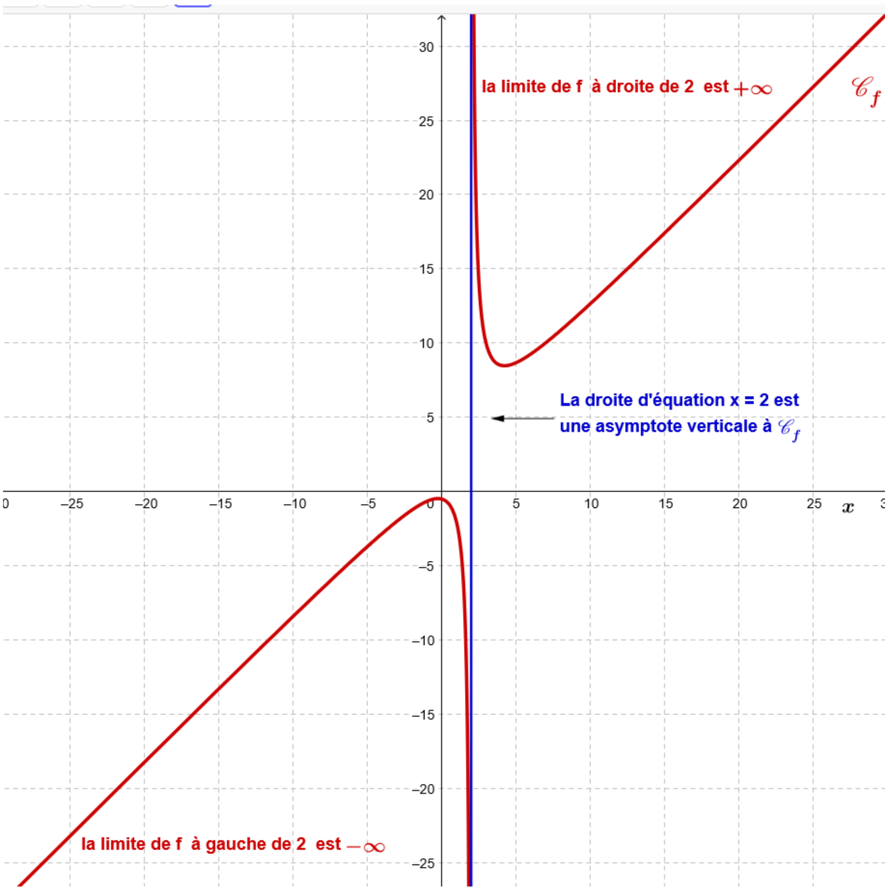
Exemple :



b) Asymptote verticale

Lorsque la limite en un réel a d'une fonction f est infinie, la droite d'équation $x = a$ est appelée asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$

Exemple :


la limite de f à droite de 2 est $+\infty$
$\mathscr{C}_f$
La droite d'équation x = 2 est
une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$
la limite de f à gauche de 2 est $-\infty$
x

IV) Limites de fonctions de références

Fonctions usuelles

Fonction	Ensemble de définition	Limite en $+\infty$	Limite en $-\infty$	Limite en 0
x	$\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	0
x^2	$\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	0
x^3	$\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	0
x^n	$\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	0
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	0	0	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$
$\frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	0	0	Si n pair : $+\infty$ Si n impair : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$
$\sqrt{x}$	$[0\ ;\ +\infty[$	$+\infty$		0
$\ln x$	$]0\ ;\ +\infty[$	$+\infty$		$-\infty$
e^x	$\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	1